Liczby Zespolone - Wprowadzenie

Historia liczb zespolonych siega juz tysięcy lat. Już sam wielki Heron z Aleksandrii (10-70), znany nam m. in. ze wzoru umożliwiającego obliczenie pola powierzchni trójkąta ze znajomości wymiarów jego boków. Zastanawiał się on również nad równaniami kwadratowymi. Z pozoru były proste w obliczeniach, jednak ich rozwiązania nie zawsze mieściły się w ówcześnie poznawane przestrzeni liczb rzeczywistych.

Nieco później problem istnienia pól o ujemnej wartości rozważał włoski matematyk Girolamo Cardano podczas prób znalezienia rozwiązań równań sześciennych w XVI wieku.

Po raz pierwszy pojęcie liczb zespolonych, jako składających się z części rzeczywistej oraz urojonej, wprowadził niemiecki matematyk Carl Friedrich Gauss w 1832.

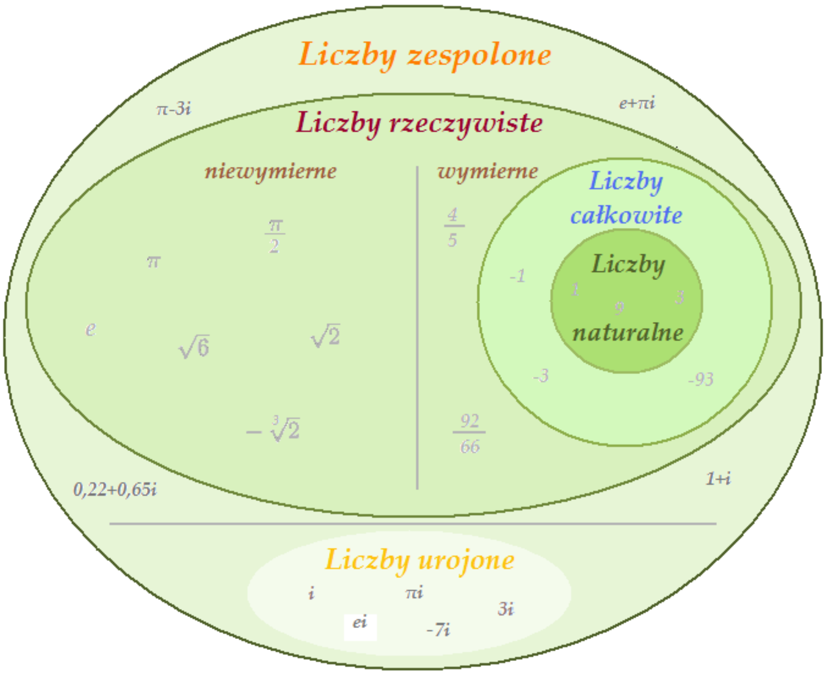
Definicje, twierdzenia i wzory

Podstawowe zbiory liczbowe i ich oznaczenia

N- zbiór liczb naturalnych
Z- zbiór liczb całkowitych
Q- zbiór liczb wymiernych
R- zbiór liczb rzeczywistych

Liczby rzeczywiste możemy przedstawić na osi liczbowej jako punkt o współrzędnej na osi x. Nieco inaczej jest z liczbami zespolonymi. W 1673 angielski matematyk John Wallis, stwierdził że liczby zespolone znajdują się wokół osi liczb rzeczywistych. Dlatego do opisania liczb zespolonych potrzebne są nam dwie osie- ox i oy. Liczbę zespoloną można zatem wyobrazić sobie jako punkt w układzie współrzędnych.

Na poniższym rysunku można zobaczyć wybrane zbiory liczbowe



Z powyższego diagramu można wywnioskować, że:
- liczby urojone są podzbiorem zbioru liczb zespolonych (liczby urojone mają część rzeczywistą równą zero, a urojoną różną od zera- posiadają tylko część urojoną); liczby urojone nie mają części wspólnej z liczbami rzeczywistymi
- liczby rzeczywiste są podzbiorem liczb zespolonych (więc w równaniach gdzie dziedzina funkcji jest określona w zbiorze liczb rzeczywistych nie znajdziemy rozwiązań z liczbami zespolonymi)

Podstawowe działania na liczbach urojonych

Mnożenie i dzielenie

$$+\sqrt{-u} \cdot -\sqrt{-u} = -u$$
$$-\sqrt{u} \cdot -\sqrt{-u} = -u$$
$$+\sqrt{-u} \cdot -\sqrt{-u} = +u$$
$$-\sqrt{-u} \cdot +\sqrt{-u} = +u$$

Można zauważyć, że liczby urojone poddają się tym samym właściwością, co liczby rzeczywiste, ale z różnicą wyniku. Dlaczego więc tak się dzieje?

Liczba i

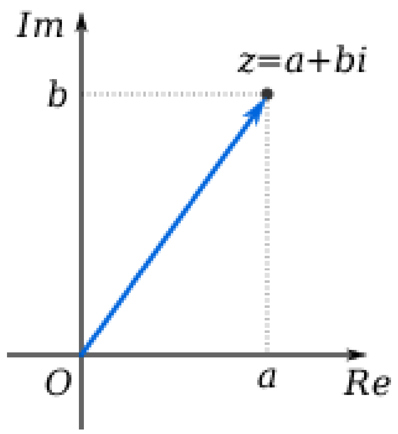
Aby łatwiej móc zapisać liczby zespolone i urojone wprowadzono oznaczenie $\sqrt{-1}$ (*słownie: pierwiastka z liczby minus jeden*) jako literę i.

Dobrze jest również zaznaczyć, że $i^2 = \left(\sqrt{-1}\right)^2 = -1$

Dlatego właśnie działania na liczbach urojonych mają przeciwny znak do tego w liczbach rzeczywistych.

Płaszczyzna zespolona

Jak już wcześniej było wspomniane liczbę zespoloną można przedstawić na układzie współrzędnych jako punkt. Liczba zespolona ma swoją część rzeczywistą i urojoną, dlatego właśnie na osi odpowiadającej ox znajdują się liczby rzeczywiste, a na oy liczby urojone.



liczba zespolona na płaszczyźnie zespolonej

Ogólna postać liczby zespolonej

Liczba zespolona składa się z części rzeczywistej określaną jako Re(z) oraz części urojonej Im(z).

Więc liczbę zespoloną można przedstawić jako:

z = Re(z) + Im(z) i

gdzie:
z- liczba zespolona

Postać algebraiczna liczby zespolonej jest częściej używana i można ją zapisać jako:

z = a+bi

gdzie:
z- liczba zespolona
a- część rzeczywista liczby zespolonej
b- część urojona liczby zespolonej

Fizyka a liczby zespolone

Liczby zespolone na początku były rozważane w kontekście ujemnych pól figur czy równań sześciennych.
Mechanika kwantowa jako jedyna w swoim rodzaju dziedzina fizyki opisuje obiekty, które mogą się zachowywać w jednym momencie jak cząstka, a w drugim jak fala. Erwin Schrödinger w swoich równaniach opisujących funkcję falową wykorzystał właśnie liczby zespolone. W laboratorium w Hefei przeprowadzono doświadczenia z lokalnym rozróżnianiem splątanych stanów dwufotonowych przy użyciu technik optyki liniowej. Jak się okazało, dzięki liczbom zespolonym można rozróżnić stany kwantowe. Było to ważnym dowodem, że liczby zespolone są integralną częścią mechaniki kwantowej.

Podsumowanie

Liczby zespolone z pewnością się należą do zagadnień najłatwiejszych, jednak z dobrym nastawieniem i odpowiednią pomocą stają się bardzo ciekawe. Na naszych spotkaniach jedynie zahaczyliśmy o ten niezwykły zbiór liczb, nie odkryliśmy wszystkich zagadek z nim związanych, ze względu na ograniczony czas. Podczas zajęć ćwiczyliśmy swoje umiejętności matematyczne, jednocześnie zdobywając nową wiedzę. Nasza przygoda rozpoczęła się na fizyce kwantowej, a zakończyła rozszerzeniem zbioru liczb rzeczywistych. Pomimo wielu trudności liczby urojone i zespolone będziemy miło wspominać.

Bibliografia:
news,87076,urojona-czesc-mechaniki-kwantowej-naprawde-istnieje.html
Liczby_zespolone
Grafika Google